УДК 511.512

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л.Н. Куртова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Аннотация. Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения с квадратичными формами. При доказательстве используется оценка для суммы сумм Клостермана.

Ключевые слова: аддитивные задачи, число решений, асимптотическая формула, суммы Клостермана.

1. Введение. В 1927 г. А.Е. Ингам поставил и решил элементарным методом задачу получения асимптотической формулы для числа решений диофантового уравнения:

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \le n. \tag{1}$$

Эта задача получила название аддитивной проблемы делителей Ингама.

В 1931 году Т. Эстерман [1] для числа решений $J(n)$ уравнения (1) круговым методом вывел асимптотическую формулу

$$J(n) = nP_2(\ln n) + R(n)\,,$$

где $P_2(t)$ – многочлен степени 2, а $R(n) = O(n^{11/12}\ln^{17/3} n)$.

Оценка остаточного члена этой формулы уточнялась многими авторами.

Так в 1979 году Д.И. Исмоилов, развивая метод Т. Эстермана, доказал, что $R(n) = O(n^{5/6+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая постоянная. Практически одновременно с Исмоиловым другим методом ту же оценку остатка получил Д.Р. Хиз-Браун.

В 2006 году Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков [2] вывели новую оценку для $R(n)$: $R(n) \ll n^{3/4}\ln^4(n)$.

В 1982 году Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [3], использую оценку суммы сумм Клостермана, доказали, что $R(n) = O(n^{2/3+\varepsilon})$.

В математической литературе известны многочисленные аналоги данной задачи. Нас заинтересовал один из таких аналогов. Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F, $Q_i(\bar{m}) = \frac{1}{2}\bar{m}^t A_i\bar{m}$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i, $\det A_i = -\delta_F$, $i = 1, 2$. Пусть

$$I(n,h) = \sum_{Q_1(\bar{m})-Q_2(\bar{k})=h} e^{-(Q_1(\bar{m})+Q_2(\bar{k}))/n}\,. \tag{2}$$

Ставится вопрос о получении асимптотической формулы для $I(n,h)$. Данная задача рассматривалась в статье [4], в которой выведена асимптотическая формула для числа решений уравнения в общем случае. В настоящей работе изучается один частный случай, для которого удается улучшить оценку остатка.

Теорема. *Пусть ε – произвольное положительное число, δ_F – дискриминант поля F, $\delta_F=-p$, $p\geq 3$ – простое число, $n\in N$, h – натуральное число, такое, что $h\equiv 0 \pmod p$, $h\leqslant n^{\varepsilon}$. Справедлива асимптотическая формула*

$$I(n,h)=\frac{2\pi^2 n}{p}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4}\sum_{\substack{l=1,\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi i\frac{hl}{q}}G_1(q,l,\overline{0})G_2(q,-l,\overline{0})+O(n^{7/12+\varepsilon})\,, \qquad (3)$$

где $G_i(q,l,\overline{0})=\sum\limits_{\overline{m}\pmod q}\exp(2\pi ilQ_i(\overline{m})/q)$ $(i=1,2)$ – двойные суммы Гаусса и сумма ряда положительна.

Доказательство проводится круговым методом с применением оценок А.Вейля для суммы Клостермана и Х.Иванца для суммы сумм Клостермана.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (Равенства для сумм Гаусса). *Пусть $F=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, $d\equiv 1 \pmod 4$, $\delta_F=-p$ – дискриминант поля F.*

1) Если $(q,p)=1$, то $G_1(q,l,\bar{m})=\exp(-2\pi il^*p^*Q_1'(\bar{m})/q)G_1(q,l,\overline{0})$, причем

$$G_1(q,l,\overline{0})=\begin{cases} q\left(\dfrac{-p}{q_1}\right)(-1)^{(1+p)\alpha/4} & \text{, если } q=2^{\alpha}q_1, (q_1,2)=1,\\ q\left(\dfrac{-p}{q}\right) & \text{, если } (q,2)=1.\end{cases}$$

2) Если $(q,p)=p$, то $G_1(q,l,\bar{m})=\varepsilon(p)q\sqrt{p}\chi(Q_1'(\bar{m});p,0)\left(\dfrac{a_1}{p}\right)\left(\dfrac{l}{p}\right)\exp(-2\pi il^*Q_1'(\bar{m})/pq)$, где

$$\varepsilon(p)=\begin{cases}1, & \text{если } p\equiv 1 \pmod 4,\\ i, & \text{если } p\equiv 3 \pmod 4,\end{cases}$$

a_1 – коэффициент при m_1^2 квадратичной формы $Q_1'(\bar{m})=\frac{1}{2}\bar{m}^t pA_1^{-1}\bar{m}$.

Доказательство см. [5].

Лемма 2 (Оценка суммы сумм Клостермана). *Пусть T,U,V,p,ε – положительные действительные числа, a_u и b_v – последовательности комплексных чисел, $S(u,v,q)$ – сумма Клостермана. Тогда*

$$\left|\sum_{U\leqslant u\leqslant 2U}a_u\sum_{V\leqslant v\leqslant 2V}b_v\sum_{\substack{q\leqslant\sqrt{\frac{uv}{UV}}T,\\ q\equiv 0 \pmod p}}\frac{1}{q}S(u,v,q)\right|\leqslant cT^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p}(UV)^{1/2}+(UVT)^{1/6}\right)\times$$

$$\times \left(\sum_{U \leqslant u \leqslant 2U} |a_u|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{V \leqslant v \leqslant 2V} |b_v|^2 \right)^{1/2} .$$

Доказательство см. в [7, с. 234].

3. Схема доказательства теоремы.

1. Получение главного члена асимптотической формулы не отличается от общего случая, рассмотренного в работе [4].

2. Более подробно остановимся на оценке остатков. Рассмотрим один из них. Пусть θ – сколь угодно малое положительное число.

$$R = \sum_{q \le N} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i \frac{hl}{q}} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i h x} dx ,$$

где

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{n^{-1} - 2\pi i x} \sum_{\substack{\bar m \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar m \ne \bar 0}} \exp\left(-\frac{4\pi^2}{q^2} \frac{Q_1'(\bar m)}{n^{-1} - 2\pi i x} \right) G_1(q, l, \bar m) ,$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{n^{-1} + 2\pi i x} \sum_{\substack{\bar k \in \mathbb{Z}^2 \\ \bar k \ne \bar 0}} \exp\left(-\frac{4\pi^2}{q^2} \frac{Q_2'(\bar k)}{n^{-1} + 2\pi i x} \right) G_2(q, -l, \bar k) .$$

Функции Φ_1 и Φ_2 содержат суммы Гаусса. Вычислим произведение соответствующих сумм Гаусса, используя равенства из леммы 1. Имеем

$$G_1(q, l, \bar m) G_2(q, -l, \bar k) = \varepsilon_2(q, p, a_1, a_2, \bar m, \bar k) q^2 e^{-2\pi i l^* d_1 (Q_1'(\bar m) - Q_2'(\bar k))/q} ,$$

где

$$\varepsilon_2(q, p, a_1, a_2, \overline{m}, \overline{k}) = \begin{cases} 1 , & \text{если } (q,p) = 1, 2 \nmid q , \\ (-1)^{\frac{(1+p)\alpha}{2}}, & \text{если } (q,p) = 1, 2^\alpha || q, \\ p\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right) \chi(Q_1'(\bar m) - Q_2'(\bar k); p, 0), & \text{если } (q,p) = p \end{cases}$$

и

$$d_1 = \begin{cases} p^*, & \text{если } (q,p) = 1, \\ 1/p, & \text{если } (q,p) = p. \end{cases}$$

Разобьем сумму, определяющую R, на две суммы:

$$R = \sum_{q \le n^{1/2-\theta}} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} + \sum_{n^{1/2-\theta} < q \le N} \int_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} = \sum R1 + \sum R2 .$$

Так как $q \leqslant n^{1/2-\theta}$, $0 \leqslant x \leqslant [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, то

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{4\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{q^2(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) = O\Big(e^{-cn^{2\theta}}\Big),\ \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \exp\left(-\frac{4\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{q^2(n^{-1}+4\pi^2x^2n)}\right) = O\Big(e^{-cn^{2\theta}}\Big).$$

Тогда

$$\sum\nolimits_{R1} \ll n^{3/2-\theta+3\varepsilon} e^{-cn^{2\theta}} \sum_{q\leq n^{1/2-\theta}} q^{-5/2} \ll n^{7/12+\varepsilon}\ .$$

3. Перейдем к оценке $\sum_{R2}$.

$$\sum\nolimits_{R2} = \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq 0}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \sum_{n^{1/2-\theta}<q\leq N} \varepsilon_2(q,p,a_1,a_2,\overline{m},\overline{k})q^{-1}S(-h,-d_1(Q_1'(\overline{m})-Q_2'(\overline{k})),q)f(q),$$

где

$$f(q) = q^{-1} \int\limits_0^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \exp\left(-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_1'(\overline{m})}{n^{-1}-2\pi ix}\right)\exp\left(-\frac{4\pi^2}{q^2}\frac{Q_2'(\overline{k})}{n^{-1}+2\pi ix}\right)\frac{e^{-2\pi ihx}dx}{n^{-2}+4\pi^2x^2}\ .$$

$$f(q) = O(e^{-c(Q_1'(\overline{m})+Q_2'(\overline{k}))}n/q),\quad f_q'(q) = O((Q_1'(\overline{m})+Q_2'(\overline{k}))e^{-c(Q_1'(\overline{m})+Q_2'(\overline{k}))}n/q^2)\,,$$

где c – постоянная.

Сумму по q перепишем в виде: $\sum\limits_q = \sum_{q\not\equiv 0 \pmod p} + \sum_{q\equiv 0 \pmod p} = \sum_1 + \sum_2$.

1) Пусть $q \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда $|\varepsilon_2(q_1,p,a_1,a_2,\overline{m},\overline{k})| = 1$, $d_1 = p^*$. По условию $p \mid h$, обозначим через $h_1 = h/p$, h_1 – целое число, $v_1 = Q_1'(\overline{m}) - Q_2'(\overline{k})$. Тогда

$$\sum\nolimits_1 \ll \sum_{\substack{i=1\\ i=p}} \left| \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{n^{1/2-\theta}<q\leq N\\ q\equiv 0 \pmod i}} q^{-1}S(-h_1,-v_1,q)f(q)\right|.$$

К каждой из сумм по q применим преобразование Абеля. Положим в лемме 2, что $u=-h_1, v=-v_1, |a_u|=1, |b_v| = e^{-cv_1}n^{1/2+\varepsilon}, U=V=n^\varepsilon, T=N$ и p равно одному из чисел $1,p$. В результате получаем

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} f(N) \sum_{\substack{q\leq N\\ q\equiv 0 \pmod i}} q^{-1}S(-h_1,-v_1,q) \ll n^{7/12+\varepsilon}\ .$$

$$\sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2\\ \overline{k}\neq\overline{0}}} f_q'(q) \sum_{\substack{t\leq q\\ t\equiv 0 \pmod i}} q_1^{-1}S(-h_1,-v_1,t) \ll q^{-11/6+\varepsilon}n^{1+\varepsilon}\ .$$

Проинтегрировав последнюю оценку по q в пределах $[n^{1/2-\theta};\infty)$, в итоге получим $\sum_1 = O(n^{7/12+\varepsilon})$.

2) Пусть $q \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда $|\varepsilon_2(q_1, p, a_1, a_2, \overline{m}, \overline{k})| = p$ и не зависит от q, $d_1 = p^{-1}$. Обозначим через $h_1 = h$, $v_1 = (Q_1'(\overline{m}) - Q_2'(\overline{k}))/p$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum{}_2 \ll \left| \sum_{\substack{\overline{m}\in\mathbb{Z}^2 \\ \overline{m}\neq\overline{0}}} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}^2 \\ \overline{k}\neq\overline{0}}} p \sum_{\substack{n^{1/2-\theta}<q\leq N \\ q\equiv 0 \pmod{p}}} q^{-1} S(-h_1, -v_1, q) f(q) \right| .$$

К суммам по q применим преобразование Абеля и для получения оценок используем Лемму 2. Все рассуждения аналогичны тем, что проводились для случая 1). В результате можно утверждать, что $\sum_2 = O(n^{7/12+\varepsilon})$.

Таким образом, нами показано, что $\sum_{R2} = O(n^{7/12+\varepsilon})$.

Литература

1. Esterman T. Uber die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. reine und ang. Math. – 1931. – №164. – P.173-182.
2. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Об аддитивной проблеме делителей Ингама // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2006. – №5. – С.32-35.
3. Deshouillers J.-M., Iwaniec H. An additive divisor problem // J. London Math. Soc. – 1982. – 26(2). – P.1-14.
4. Куртова Л.Н. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами // Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия, Математика. – 2007. – №(57). – С.107-122.
5. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник. – 2003. – 4;2. – С.53-67.
6. Deshouillers J.-M., Iwaniec, H. Kloosterman sums and fourier coefficients of cusp forms // Invent. math. – 1982. – 70. – P.219-288.

ABOUT THE NUMBER OF SOLUTION OF AN EQUATION WITH SQUARES

L.N. Kurtova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Abstract. The asymptotic formula of the solution number of the equation with squares is obtained. It is done by circular method with using the estimate for sum of Kloosterman's sums.

Key words: additive problems of number theory, number of solution, asymptotic formula, Kloosterman's sums.